10-15 ans

COMPRENDRE LES MATHS AVEC L'HISTOIRE DES SCIENCES

Catherine d'Andrea

ellipses

PARTIE 1

Géométrie

CHAPITRE 1

Le théorème de Thalès

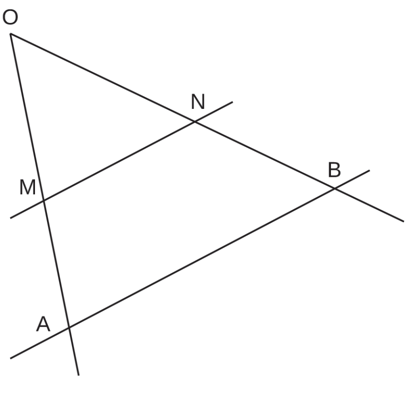
Le théorème de Thalès permet de calculer une longueur lorsque l'on se trouve dans une configuration où l'on sait que des droites sont parallèles. Sa réciproque permet de prouver que deux droites sont parallèles et sa contraposée de déterminer qu'elles ne le sont pas. On attribue à Thalès ce théorème, en pensant qu'il s'en serait servi pour mesurer la pyramide de Khéops.

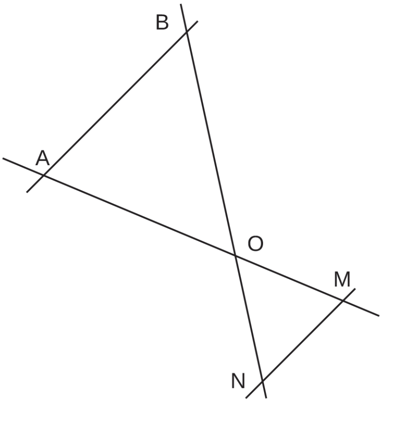
✔ Ce qu'on apprend au collège

Ce théorème est vu en classe de 3e.

Soient O, A, B, M et N cinq points.

Si O, A et M sont alignés, si O, B et N sont alignés et si $(MN) \parallel (AB)$ alors $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON} = \dfrac{AB}{MN}$.





Exemple :

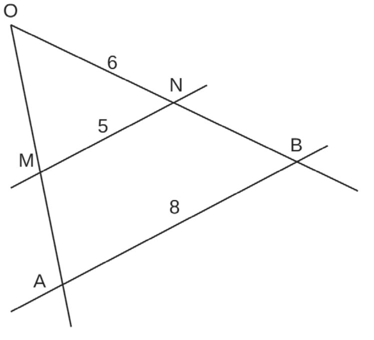
Sur la figure ci-dessous, les points O, M et A sont alignés, les points O, N et B sont alignés et les droites (MN) et (AB) sont parallèles. On peut donc calculer la longueur OB :

D'après le théorème de Thalès,

$\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON} = \dfrac{AB}{MN}$.

Soit donc $\left(\dfrac{OA}{OM} =\right) \dfrac{OB}{6} = \dfrac{8}{5}$.

On obtient donc $OB = \dfrac{6 \times 8}{5} = 9{,}6$.



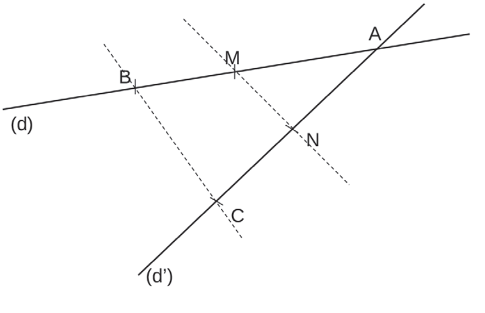
La réciproque du théorème de Thalès

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A.

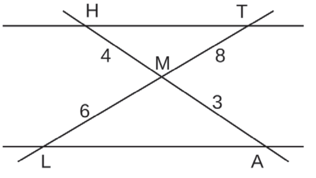
B et M sont deux points de (d) distincts de A.

C et N sont deux points de (d') distincts de A.

Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



Exemple :



Les droites (LA) et (HT) sont-elles parallèles ?

$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ et $\frac{ML}{MT} = \frac{6}{8} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{3}{4}$.

Donc $\frac{MA}{MH} = \frac{ML}{MT}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut en conclure que $(LA)//(HT)$.

La contraposée du théorème de Thalès

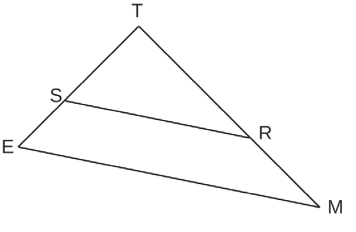
Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A.

B et M sont deux points de (d) distincts de A.

C et N sont deux points de (d') distincts de A.

Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AB}{AM} \neq \frac{AC}{AN}$ alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

Exemple :



Sur la figure ci-dessus $TR = 11$ cm ; $TS = 8$ cm ; $TM = 15$ cm et $TE = 10$ cm.

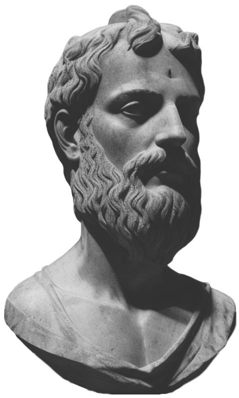
$\frac{TS}{TE} = \frac{8}{10} = 0{,}8$ et $\frac{TR}{TM} = \frac{11}{15} \approx 0{,}7$.

Donc $\frac{TS}{TE} \neq \frac{TR}{TM}$ et par la contraposée du théorème de Thalès, on en déduit que les droites (SR) et (EM) ne sont pas parallèles.

Du côté de l'histoire

Thalès de Milet

(env. -624/-547)



Thalès est considéré comme le premier mathématicien connu de l'histoire. Marchand de profession, c'est un homme avisé : un jour, alors qu'il conduisait une caravane, un mulet chargé de sacs de sel tomba à l'eau au passage d'un gué. Une partie du sel se trouva ainsi dissoute. Le mulet se sentit plus léger et au gué suivant, se jeta volontairement à l'eau pour alléger à nouveau son fardeau. Afin de lui faire perdre cette fâcheuse habitude, Thalès le chargea d'éponges à l'expédition suivante.

Il aurait prédit une éclipse de soleil, il aurait également découvert l'inégalité des jours et des nuits suivant les saisons, et qu'une année dure environ 365 jours. Enfin, il observe que la constellation de la petite ourse permet de repérer aisément l'étoile polaire, et donc le nord.

Ses calculs lui permettent de prédire une récolte d'olives abondante la saison suivante. Il aurait acquis tous les pressoirs de la région et, en imposant le prix de l'huile, se serait enrichi rapidement. Thalès se consacre alors pleinement à l'étude de la géométrie et de la philosophie. Il fonde une école à Milet, où il transmet ses connaissances à de nombreux élèves, dont un est particulièrement célèbre, puisqu'il s'agit de Pythagore.

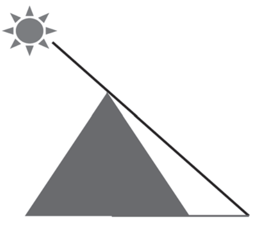
Tout occupé à ses problèmes, Thalès a la réputation d'être passablement distrait. On raconte qu'alors qu'il marchait à travers la campagne en compagnie de sa servante, regardant le ciel pour y observer les astres, il ne vit pas un grand trou au milieu du chemin et tomba dedans. La jeune femme lui dit, en l'aidant à sortir du trou : « *Tu n'arrives pas à voir ce qui est à tes pieds et tu crois pouvoir connaître ce qui est dans le ciel !* »

Thalès meurt vers 547 av. J.-C. Il se passionnait pour la gymnastique et on l'aurait trouvé, mort par déshydratation, dans les gradins d'un stade, lors d'une compétition à laquelle il assistait.

La mesure de la pyramide de Khéops

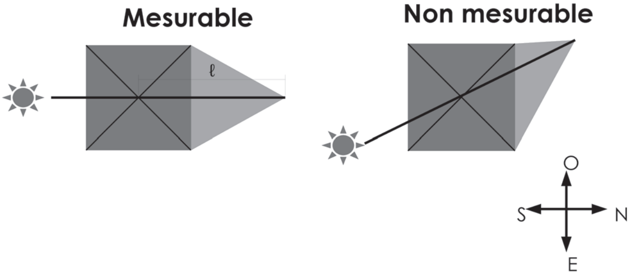
Lors de son voyage en Égypte, Thalès a été ébloui par les pyramides. Il a décidé de mesurer la hauteur de la plus grande, la pyramide de Khéops. Voyons comment il s'y est pris.

Pour commencer, il lui fallait choisir une unité de longueur : il utilisa sa propre taille, et nomma cette unité *le thalès*. L'idée étant que lorsque son ombre serait égale à sa taille, il en serait de même pour la pyramide. Il suffisait alors de mesurer la longueur de l'ombre de cette pyramide.

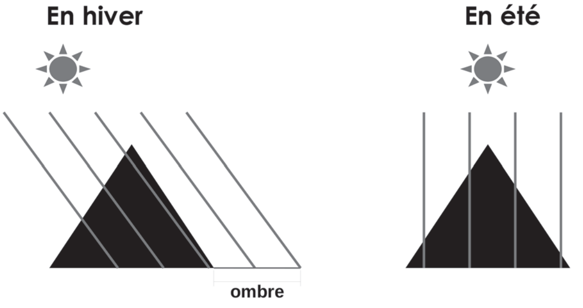


Pour faire cette mesure, l'ombre doit être perpendiculaire à un côté de la base, ce qui correspond à un moment où le soleil est orienté plein sud, c'est-à-dire à midi (heure solaire), la pyramide ayant elle-même une face orientée plein sud.

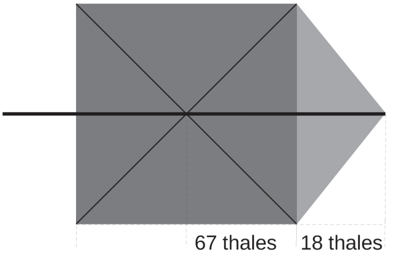
Vue de dessus :



Enfin, le soleil doit être suffisamment bas pour que l'ombre de la pyramide dépasse au sol, donc plutôt en hiver. Gizeh étant situé à 30° de latitude nord, il a été calculé que cela n'est possible que deux jours par an : le 21 novembre et le 20 janvier. Thalès n'a donc pas pu mesurer la hauteur de cette pyramide n'importe quand !



Il obtient 18 thalès pour l'ombre, puis il mesure la partie cachée de l'ombre, soit donc la moitié de la longueur du côté de la pyramide, et obtient 67 thalès.



La pyramide de Khéops mesure donc 18 + 67 = 85 thalès.

Or, 1 thalès vaut 3,25 coudées égyptiennes.

Ainsi, la pyramide fait $85 \times 3{,}25 = 276{,}25$ coudées.

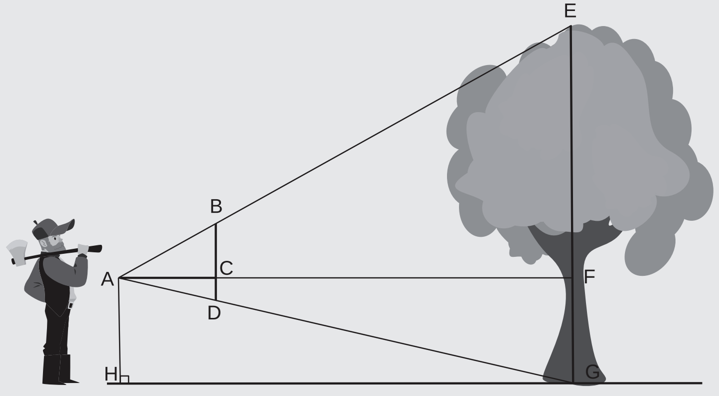
On sait aujourd'hui que la pyramide mesure 147 mètres, soit 280 coudées. La mesure de Thalès était assez précise !

Notons au passage que nous pouvons calculer la taille de Thalès :

$$\frac{147}{276{,}25} \times 3{,}25 \approx 1{,}73 \text{ m.}$$

→ Pour aller plus loin

La croix du bûcheron



La croix du bûcheron est une croix telle que $AC = BD$.

(AC) doit être positionnée horizontalement et (BD) verticalement.

Le bûcheron se place de telle sorte qu'en regardant les deux extrémités verticales de sa croix, il voit le haut et le bas de l'arbre :

A, B et E alignés, A, D et G alignés.

On place un point F au niveau de l'arbre, de telle sorte que A, C et F soient alignés.

Dans le triangle AEF : $(BC)//(EF)$.

D'après le théorème de Thalès : $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}$ donc $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$. (1)

Dans le triangle AEG : $(BD)//(EG)$.

D'après le théorème de Thalès : $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AG} = \frac{BD}{EG}$ donc $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{EG}$. (2)

De (1) et de (2), on en déduit que $\frac{AC}{AF} = \frac{BD}{EG}$.

Or $AC = BD$, donc $AF = EG$.

Ainsi, dans la position prise par le bûcheron, il sera à une distance de l'arbre égale à sa hauteur.

CHAPITRE 2

Le théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore permet de calculer une longueur dans un triangle rectangle, lorsque l'on connaît les deux autres. Sa réciproque permet de montrer qu'un triangle est rectangle, et donc que deux droites sont perpendiculaires, sa contraposée permet d'affirmer que deux droites ne sont pas perpendiculaires.

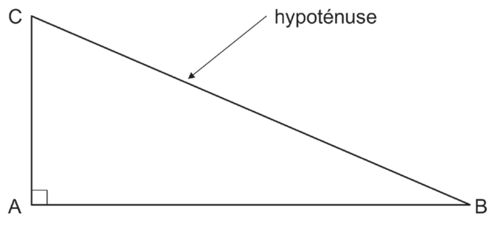
Ce théorème n'a pas été découvert par Pythagore : les Babyloniens l'utilisaient déjà. Mais si on considère les théorèmes de Thalès et de Pythagore, on se rend compte que l'un traite de droites parallèles et l'autre de droites perpendiculaires. On peut donc penser que ces deux théorèmes portent le nom de ces mathématiciens pour leur rendre hommage : ce sont les deux premiers mathématiciens de l'histoire des mathématiques dont on connaisse le nom.

✔ Ce qu'on apprend au collège

Ce théorème est vu en classe de 4e.

Soit ABC un triangle rectangle en A.

Alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.



Si ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Exemple 1

Soit EFG un triangle rectangle en E, tel que $EF = 3$ cm et $EG = 4$ cm.

Alors forcément : $FG^2 = EF^2 + EG^2$.

Soit donc $FG^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, et par suite $FG = \sqrt{25} = 5$.

Exemple 2

Soit ABC un triangle rectangle en B, tel que $AC = 8$ cm et $AB = 3$ cm.

Alors $AC^2 = BA^2 + BC^2$

Soit donc $8^2 = 3^2 + BC^2$ ou encore $64 = 9 + BC^2$

Et donc $BC^2 = 64 - 9 = 55$, c'est-à-dire $BC = \sqrt{55} \approx 7{,}4$

• La réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

Exemple

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 10$.

On choisit la plus grande longueur et on calcule son carré :
$BC^2 = 10^2 = 100$.

On calcule la somme des carrés des deux autres côtés :
$AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

On remarque que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. On en déduit que, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en A.

• La contraposée du théorème de Pythagore

Si dans un triangle le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemple

Soit DEF un triangle tel que $DE = 7$, $DF = 9$ et $EF = 6$.

On choisit la plus grande longueur et on calcule son carré :
$DF^2 = 9^2 = 81$.

On calcule la somme des carrés des deux autres côtés :
$DE^2 + EF^2 = 7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85$.

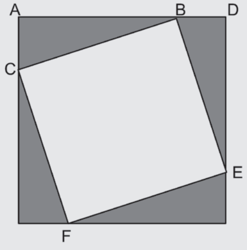
On remarque que $DE^2 + EF^2 \neq EF^2$. On en déduit que, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.

➜ *Pour aller plus loin*

Une démonstration du théorème de Pythagore

C'est le théorème dit « chinois ».

Dans le grand carré, on place quatre triangles rectangles semblables, comme indiqué sur la figure :



Intéressons-nous au quadrilatère blanc :

Ses quatre côtés sont de même longueur, donc c'est un losange.

En outre, dans le triangle *ABC*, la somme des angles vaut 180°.

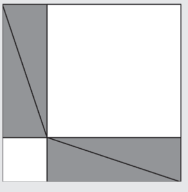
Donc $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$.

Or $\widehat{DBE} = \widehat{ACB}$, donc $\widehat{ABC} + \widehat{DBE} = 90°$.

On en déduit que l'angle $\widehat{CBE}$ est un angle droit.

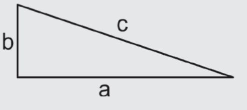
Par suite, *ABEF* est un carré.

Modifions la position des quatre triangles :



Pour des raisons évidentes, on remarque ici que les triangles forment deux rectangles, et que les deux figures blanches sont des carrés.

Notons a, b et c les longueurs des côtés du triangle rectangle.



Le carré blanc de la première figure a une aire de c^2.

Les deux carrés blancs de la seconde figure ont pour aires a^2 et b^2.

Dans les deux figures, l'aire du grand carré ne change pas, ni celle des quatre triangles.

On en déduit donc que $a^2 + b^2 = c^2$.

Du côté de l'histoire

Pythagore
(env. -580/-495)

Pythagore serait né dans l'île de Samos, au large de la Turquie, vers 580 av. J.-C. Avant sa naissance, ses parents auraient consulté la Pythie, l'oracle de Delphes. Elle leur aurait annoncé qu'ils attendaient un enfant, qui serait d'une grande beauté et ferait preuve d'une grande sagesse. Pythagoras se traduit en effet par « celui qui a été annoncé par la Pythie ». À 18 ans, il participe aux jeux Olympiques, où il remporte l'épreuve du pugilat (c'est une sorte de boxe). Il a été l'élève de Thalès. Celui-ci lui aurait enseigné tout ce qu'il savait, puis lui aurait conseillé de poursuivre son instruction auprès des prêtres égyptiens. Pythagore entreprend alors un long voyage qui le conduit d'abord en Syrie, puis au Liban, en Égypte et enfin à Babylone.

Lorsqu'il retourne à Samos, il décide d'enseigner ce qu'il a lui-même appris. Mais il a peu de succès. Il aurait fini par dénicher un jeune homme pauvre, dont le comportement laissait prévoir une bonne capacité d'apprentissage. Il lui aurait promis une pièce d'argent pour chaque théorème qu'il parviendrait à comprendre. Pythagore lui aurait donné les pièces comme prévu, jusqu'à ce qu'il juge son élève prêt à recevoir son enseignement gratuitement. L'élève aurait alors choisi de rembourser Pythagore, en lui rendant une pièce à chaque nouveau théorème enseigné.

Pythagore s'installe finalement à Crotone, une cité située au sud de l'Italie. Il y fonde son école. En chemin, il avait croisé des pêcheurs : il réussit à prévoir le nombre de poissons pêchés dans leur filet ; fort de l'impression faite, sa réputation grandit et son école a cette fois-ci du succès. Elle prend la forme d'une congrégation religieuse.

Les pythagoriciens ne sont pas que mathématiciens : leurs préoccupations sont également politiques et religieuses. Mais Pythagore pense que, politiquement parlant, les mathématiques peuvent fournir un modèle pour la gestion d'une cité et religieusement parlant, il croit qu'elles permettent d'accéder au divin. Les Mathématiques prennent avec lui leur indépendance des choses matérielles. Les nombres existent pour eux-mêmes, ils ne sont plus assujettis à des objets. Les notions deviennent abstraites et on s'impose les démonstrations.

CHAPITRE 3

La construction à la règle et au compas

Depuis toujours, la géométrie se trace, évidemment, avec des instruments. À l'origine, pas d'équerre, ni de règle graduée. C'est l'idée de la construction à la règle et au compas : une règle non graduée pour tracer des lignes droites, et un compas pour reporter des longueurs.

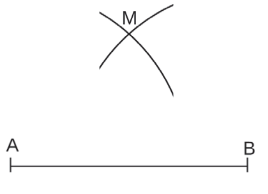
✔ Ce qu'on apprend au collège

Cette notion est abordée à n'importe quel niveau.

• Tracé de la médiatrice d'un segment

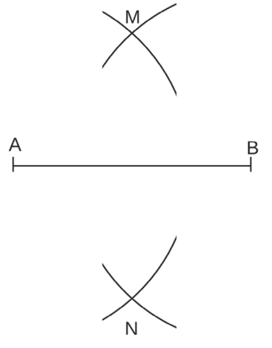
Soit $[AB]$ un segment donné. On veut tracer sa médiatrice.

Étape 1 : on trace un arc de cercle de centre A et de rayon suffisamment grand (plus grand que $\frac{AB}{2}$), ainsi qu'un arc de cercle de centre B et de même rayon.

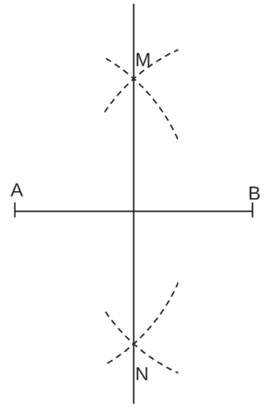


Ces deux arcs se coupent en un point M.
Par construction, $MA = MB$, donc M est un point de la médiatrice de $[AB]$.

Étape 2 : On recommence, en traçant deux nouveaux arcs de cercle (on peut tracer les arcs de même rayon, mais en dessous du segment [*AB*]). Ces deux arcs de cercle se coupent en un point *N*. De même que précédemment, le point *N* est sur la médiatrice du segment [*AB*].

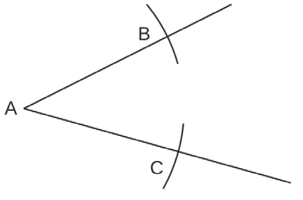


Une droite étant définie par deux points, on en déduit que la médiatrice de [*AB*] est la droite (*MN*).

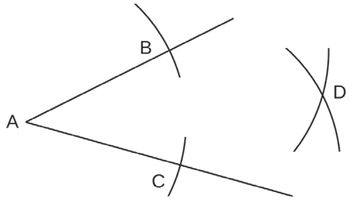


• Tracé de la bissectrice d'un angle

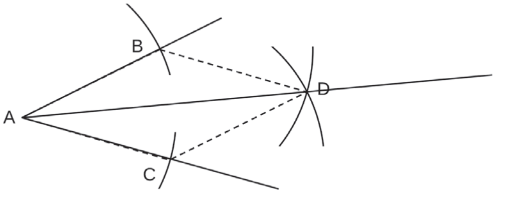
Étape 1 : on trace un cercle de centre *A* et de n'importe quel rayon. Ce cercle coupe les deux côtés de l'angle $\widehat{A}$ en deux points *B* et *C*.



Étape 2 : on trace un arc de cercle de centre B et de même rayon, ainsi qu'un arc de cercle de centre C et de même rayon. Ces deux arcs de cercle se coupent en un point D.



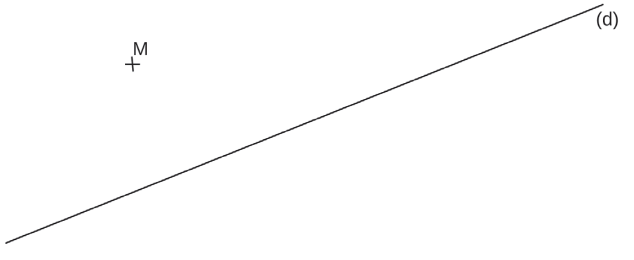
Par construction, $AB = BD = DC = CA$, donc $ABDC$ est un losange.



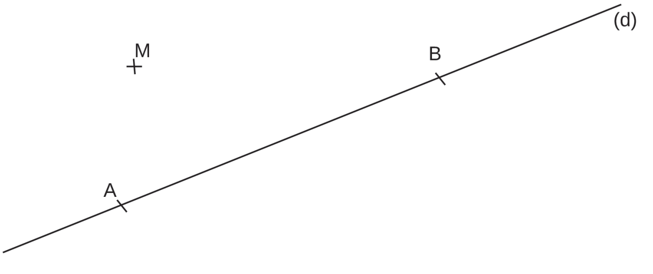
Or $[AD]$ est une diagonale de ce losange, et en conséquence, $[AD)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.

Tracé du symétrique d'un point par rapport à une droite

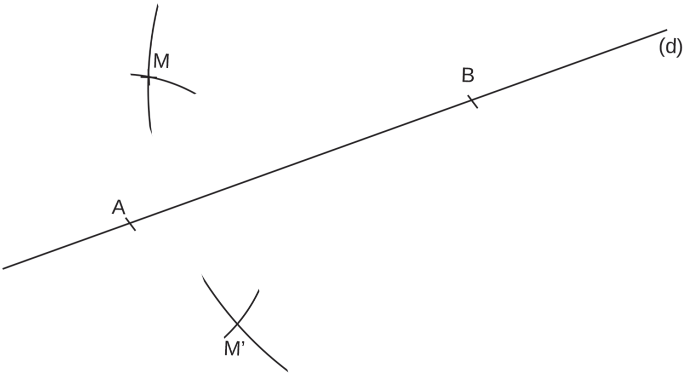
On veut tracer le symétrique du point M par rapport à la droite (d).



Étape 1 : on choisit deux points A et B sur la droite (d).



Étape 2 : on trace un arc de cercle de centre *A* passant par le point *M*, ainsi qu'un arc de cercle de centre *B* passant également par le point *M*. Ces deux arcs de cercle se coupent en un point *M′*, qui est le symétrique du point *M* par rapport à la droite (*d*).



➜ Pour aller plus loin

La construction du pentagone régulier

On doit la construction à la règle et au compas du pentagone régulier au pythagoricien Hippase de Métaponte :

1 – Tracer un cercle de centre O et de rayon R.

2 – Tracer deux diamètres perpendiculaires [AC] et [BD].

3 – Placer le point I milieu de [OA].

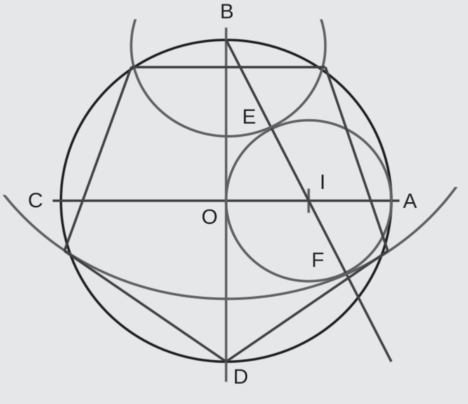
4 – Tracer le cercle de centre I passant par A.

5 – Tracer la droite (BI). Elle coupe le cercle vert en deux points E et F.

6 – Tracer les cercles de centre B passant par E et F.

7 – Ces deux cercles coupent le cercle de départ en quatre points.

8 – Le pentagone est constitué de ces quatre points et du point D.



Du côté de l'histoire

Hippase de Métaponte
(env. -500)

C'est un pythagoricien de la première heure, originaire de Métaponte. Il vénérait beaucoup Pythagore, qu'il appelait « le grand homme ». Il dirigeait le groupe des acousmaticiens, ceux qui écoutent, pendant que Pythagore s'occupait du groupe des mathématiciens. En bon pythagoricien, il pensait que le nombre est « l'organe de décision du dieu artisan de l'ordre du monde ». Il a découvert la construction du pentagone vue dans ce chapitre, mais il est surtout célèbre pour avoir dévoilé l'incommensurabilité de $\sqrt{2}$. Il aurait alors été banni de la communauté, et aurait choisi de se noyer en mer.

CHAPITRE 4

Les angles

Dans le plan, un angle est une figure formée par deux demi-droites de même origine, dont on mesure l'ouverture. Les angles vus au collège sont des angles saillants : ils font moins de 180°. (Notons qu'il existe trois mesures pour les angles : le degré, le grade et le radian : 180° = 200 grades = π radians. La mesure utilisée au collège est le degré, le radian étant utilisé au lycée).

✔ Ce qu'on apprend au collège

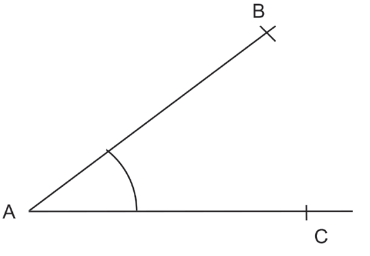
Les angles sont abordés en 6e et en 5e.

On considère l'angle $\widehat{BAC}$.

Son sommet est le point A.

Ses côtés sont les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut désigner l'angle $\widehat{BAC}$ par $\widehat{A}$, tout simplement.



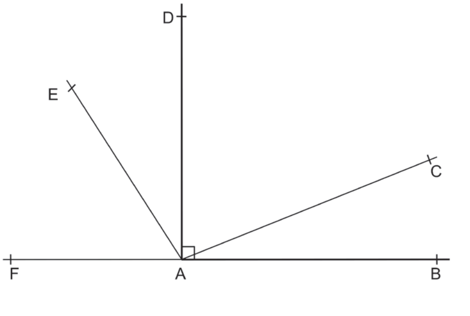
• Cas particuliers

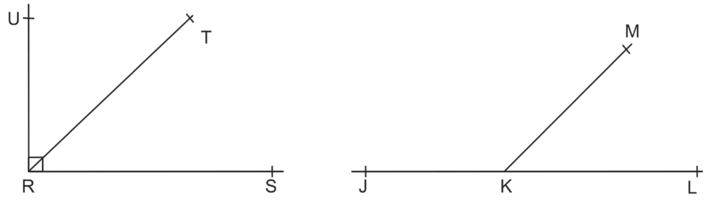
$\widehat{BAC}$ est un angle aigu : sa mesure est inférieure à 90°.

$\widehat{BAD}$ est un angle droit : sa mesure est égale à 90°.

$\widehat{BAE}$ est un angle obtus : sa mesure est supérieure à 90°.

$\widehat{BAF}$ est un angle plat : sa mesure est égale à 180°.

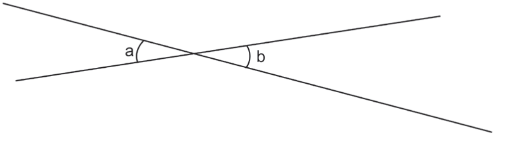




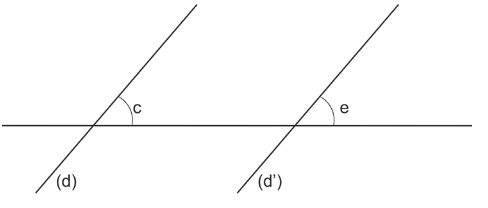
Les angles $\widehat{URT}$ et $\widehat{TRS}$ sont complémentaires : la somme de leurs mesures fait 90°.

Les angles $\widehat{JKM}$ et $\widehat{MKL}$ sont supplémentaires : la somme de leurs mesures fait 180°.

Propriétés

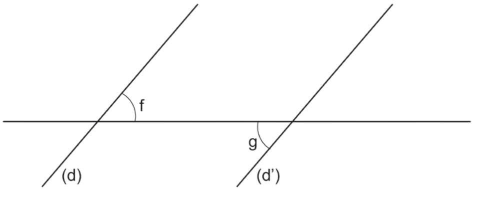


Les angles a et b sont opposés par le sommet : ils sont toujours de la même mesure.



Les angles c et e sont correspondants :

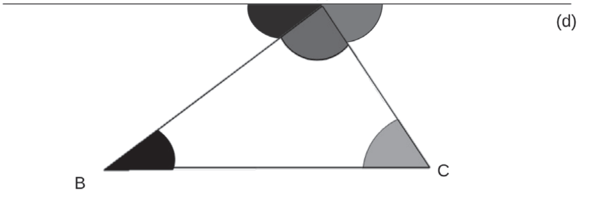
Si $(d) \parallel (d')$ alors $c = e$ et réciproquement si $c = e$ alors $(d) \parallel (d')$.



Les angles f et g sont alternes-internes :

Si $(d) \parallel (d')$ alors $c = e$ et réciproquement si $c = e$ alors $(d) \parallel (d')$.

Dans un triangle, la somme des angles fait 180° :



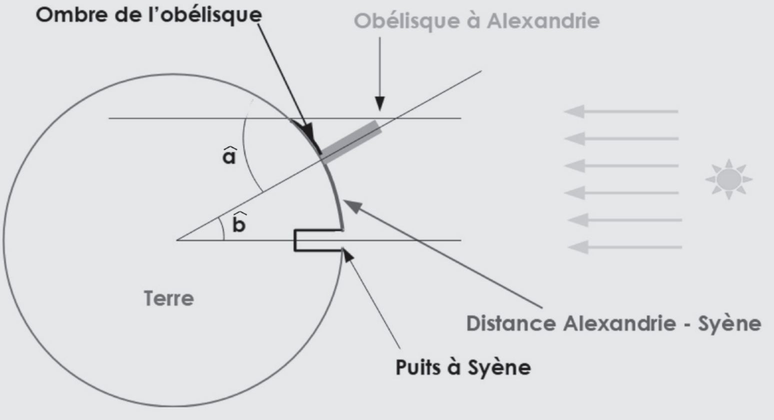
Sur cette figure, la droite (d) est parallèle à (BC). On voit que les angles « noirs » sont alternes-internes, ainsi que les angles « gris clair ». Ils sont donc de même mesure.

Les trois angles en A font 180°, donc dans le triangle ABC, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

➜ *Pour aller plus loin*

Le calcul de la circonférence de la terre

C'est le mathématicien Ératosthène qui s'est occupé de cette mesure. Il avait remarqué que lorsque le soleil est à son zénith (à midi, donc), on peut voir son reflet dans le fond d'un puits, à Syène (actuelle Assouan). Mais au même moment, à Alexandrie, l'obélisque a une ombre ! À l'époque d'Ératosthène, on sait déjà que la terre est ronde. Cette ombre va donc lui permettre de calculer son rayon.

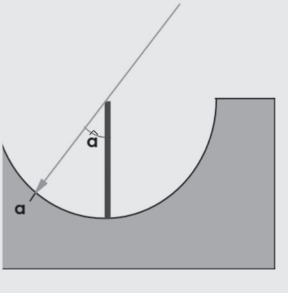


D'une part, Alexandrie et Syène sont sur le même méridien, donc $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont dans le même plan.

D'autre part, les rayons du soleil sont considérés parallèles, car le soleil est très éloigné de la terre, et les deux angles $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont alternes-internes.

Donc les deux angles sont égaux.

Pour mesurer cet angle $\hat{a}$, Ératosthène utilise un gnomon circulaire, à Alexandrie :



Il trouve que l'angle $\widehat{a}$ mesure un 50^e d'un grand cercle,

Soit donc $\dfrac{360°}{50} = 7{,}2°$.

Ératosthène n'avait plus qu'à mesurer la distance Alexandrie-Syène. C'est ici que se pose le plus gros problème : comment a-t-il fait ?

Plusieurs hypothèses ont été émises : des caravanes faisaient régulièrement le trajet. Peut-être a-t-il calculé la distance cherchée en tenant compte de la vitesse moyenne des caravanes et du temps qu'elles mettaient pour faire le trajet. Il est possible aussi qu'il ait compté les pas des chameaux, qui sont réputés avoir un pas très régulier. Mais peut-être a-t-il utilisé les services d'un métreur, ou peut-être a-t-il fait une moyenne avec toutes ces mesures. Toujours est-il qu'il a fini par obtenir que la distance séparant les deux villes était de 5 000 stades.

Longueur d'1° de méridien $= 5\,000 : 7{,}2 \approx 700$ stades.

$P =$ longueur d'un méridien $\approx 700 \times 360 \approx 252\,000$ stades.

Or un stade égyptien valait 157,5 m,

Ce qui nous donne donc $p \approx 252\,000 \times 157{,}5$

$$\approx 39\,690\,000 \text{ m}$$

$$\approx 39\,690 \text{ km}$$

Un résultat particulièrement précis pour l'époque, puisque les méridiens ont une longueur de 40 000 km !

Du côté de l'histoire

Ératosthène

(env. –276/–194)

Ératosthène est né en 276 av. J.-C. environ, à Cyrène, sur la côte sud de la Méditerranée (actuelle Libye). Jusqu'à l'âge de 40 ans, il séjourne à Athènes, puis il rejoint le roi Ptolémée III, à Alexandrie. Il devient le précepteur de son fils, futur Ptolémée IV, et assure des cours en tant que professeur à la bibliothèque. Il en est même le directeur. Il suit également les cours d'astronomie et de mathématiques d'Aristarque de Samos, avant de se lier d'amitié avec Archimède, lors des séjours en Égypte du savant sicilien.

En tant que directeur de la bibliothèque, Ératosthène a eu tout le loisir de consulter les papyrus. Il s'est intéressé à beaucoup de disciplines : philosophie, poétique, histoire, musique, mathématiques, astronomie, etc. C'est aussi un athlète confirmé, ce qui lui vaut le surnom de *pentathlos.* Ses élèves lui ont trouvé un autre surnom : β (bêta, 2^{e} lettre de l'alphabet grec). On n'est pas certain de l'explication : certains expliquent que, dans chaque discipline, il n'est que le second ; d'autres que cela vient de la numérotation de la classe où il enseigne. Apollonius, un autre professeur, serait surnommé ε.

Ératosthène décède à l'âge de 82 ans. Devenu aveugle, il se serait laissé mourir de faim parce qu'il ne pouvait plus lire, ni observer les étoiles.

CHAPITRE 5

Aire d'un triangle

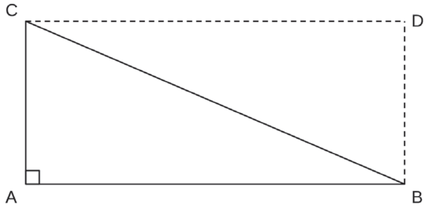
En géométrie, le triangle est une figure importante, qu'on retrouve dans les théorèmes de Thalès et de Pythagore, par exemple. Et comme c'est une figure fermée, on peut calculer son aire.

✔ Ce qu'on apprend au collège

Cette notion est abordée en classe de 6^{e}.

• Aire d'un triangle rectangle

$$\text{Aire}\left(ABC\right) = \frac{\text{Aire}\left(ABDC\right)}{2} = \frac{AB \times AC}{2}.$$

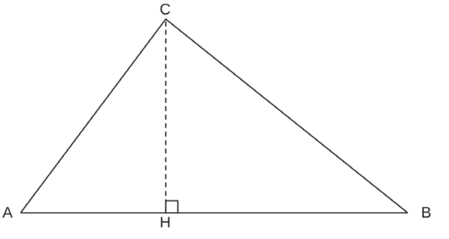


• Aire d'un triangle quelconque

Soit ABC un triangle et soit H le pied de la hauteur issue de C.

$$\text{Aire}\left(ABC\right) = \text{Aire}\left(ACH\right) + \text{Aire}\left(BCH\right)$$

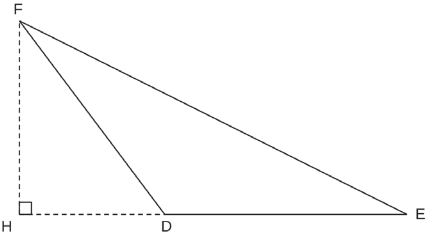
$$\text{Aire}\left(ABC\right) = \frac{AH \times HC}{2} + \frac{BH \times HC}{2}$$



En factorisant par $\frac{HC}{2}$, on obtient $\text{Aire}\left(ABC\right) = \frac{HC}{2} \times \left(AH + BH\right)$.

Or $AH + BH = AB$, donc $\text{Aire}\left(ABC\right) = \frac{HC}{2} \times AB = \frac{HC \times AB}{2}$.

Attention, la hauteur peut parfois être extérieure au triangle :



Ici, $\text{Aire}\left(FDE\right) = \text{Aire}\left(FHE\right) - \text{Aire}\left(FHD\right)$.

Donc $\text{Aire}\left(FDE\right) = \dfrac{FH \times HE}{2} - \dfrac{FH \times HD}{2}$.

En factorisant par $\dfrac{FH}{2}$, on obtient $\text{Aire}\left(FDE\right) = \dfrac{FH}{2} \times \left(HE - HD\right)$.

Or $HE - HD = DE$, donc $\text{Aire}\left(FDE\right) = \dfrac{FH}{2} \times DE = \dfrac{FH \times DE}{2}$.

D'une manière générale, on retient cette formule de la façon suivante :

$$\text{Aire d'un triangle} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}.$$

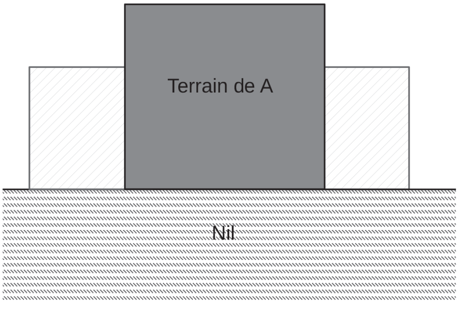
Du côté de l'histoire

Le redécoupage équitable des terres

Dans l'Égypte ancienne, le Nil était très important : source d'eau vitale, il permettait en outre, par ses crues annuelles, d'enrichir le sol en limon. Mais ces inondations détruisaient les limites des terrains des agriculteurs. D'où la nécessité de redéfinir, chaque année, des zones de même aire que l'an précédent.

Premier problème

C'est l'objet de la propriété 43 du livre 1 des *éléments* d'Euclide. Le problème est le suivant : pour un agriculteur égyptien, il est important que son terrain soit au bord du Nil, afin d'avoir accès à l'eau :



Si un nouvel agriculteur B arrive, il faut lui fournir un accès au Nil, mais comment faire ? Bien sûr, si l'on prend une partie du terrain de A, cela ne sera pas très équitable :