DICTIONNAIRE DE (PRESQUE) TOUS LES NOMBRES ENTIERS

2e édition revue et augmentée

Prix Tangente

Daniel **LIGNON**

ellipses

Entiers de 0 à 9

Les propriétés qui suivent concernent les nombres de 0 à 9. Pour les propriétés et l'histoire des chiffres, on pourra consulter le livre *Histoire comparée des numérations écrites* [Gui92] de Geneviève GUITEL ou une des versions [Ifr81] ou [Ifr94] du livre *Histoire universelle des chiffres* de Georges IFRAH.

0

- C'est le cardinal de l'ensemble vide : c'est donc le plus petit cardinal.
- C'est le plus petit ordinal.
- Pour beaucoup de personnes, même à notre époque, 0 n'est toujours pas un nombre car il est vu comme étant « *rien* ».
- « *Le zéro, ce rien qui peut tout* » selon le mathématicien et écrivain français Denis GUEDJ (1940-2010), auteur, entre autres, du remarquable roman *Le théorème du perroquet* [Gue98].
- « *Le zéro est la plus belle invention de l'esprit humain.* » selon l'écrivain français Raymond QUENEAU (1903-1976), cofondateur de l'*Oulipo*.
- Il a mis longtemps à acquérir le statut de nombre. C'est dans des documents de BRAHMAGUPTA, mathématicien indien ayant vécu au VII^{e} siècle, que l'on trouve les premières apparitions de 0 considéré comme un nombre.

  Le statut du nombre 0 est, bien sûr, lié aussi à l'introduction du chiffre 0 (ou d'un symbole jouant ce rôle) dans l'écriture des nombres, « découverte » qu'il est difficile de dater car elle se produisit dans différentes civilisations (civilisations babylonienne, chinoise, indienne, maya, etc.). Il faudra attendre quelques siècles pour que ces notions arrivent en Occident en passant par le monde arabe.

BRAHMAGUPTA (598-668)

Mathématicien et astronome indien. Un des plus importants de son époque. Né dans la province du Rajasthan, il vit sous le règne du roi VYAGHRAMUKHA. Il dirige l'observatoire astronomique d'Ujjain, ville du centre de l'Inde qui, au VII^{e} siècle, est un centre important d'études astronomiques et mathématiques.

Il est le premier à utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes, en particulier astronomiques. On lui doit, entre autres, une bonne approximation de la durée de l'année solaire et des prévisions sur les éclipses. Ses travaux sont à la base des connaissances astronomiques arabes lors de l'Âge d'Or Islamique à Bagdad entre le VIII^{e} et le XIII^{e} siècle.

Son ouvrage le plus connu est *Brahmasphutasiddhanta*, paru en 628, qui contient vingt-cinq chapitres. Il y introduit le zéro comme un nombre et indique les règles de calcul pour l'utiliser avec d'autres nombres.

Même s'il semble que les nombres négatifs aient été utilisés avant, en particulier dans les mathématiques chinoises du II^{e} et du I^{er} siècle avant J.-C., on trouve dans le livre de BRAHMAGUPTA les règles de calculs sur les nombres négatifs.

Les nombres positifs étaient présentés sous la forme de biens et les nombres négatifs de pertes. On a, par exemple :

- *un bien retranché de zéro est une dette*,
- *une dette retranchée de zéro est un bien*,
- *le produit d'un bien ou d'une dette par zéro est nul*,
- *le produit de deux biens ou de deux dettes est un bien*,
- *le produit d'un bien par une dette est une dette*...

On y trouve donc toutes les règles pour additionner et multiplier les nombres, quel que soit leur signe. Par contre, il donnait 0 comme résultat de la division de 0 par 0. L'impossibilité de la division par 0 et la nécessité d'une notion de l'infini n'étaient pas très claires.

Toujours en algèbre, il donne des méthodes de résolution pour des systèmes d'équations linéaires ou pour des équations du second degré. Il calcule des racines carrées et remarque que les nombres négatifs n'en ont pas. En géométrie, il donne de nombreuses formules sur l'aire d'un triangle ou d'un quadrilatère inscrit. Il introduit les fonctions trigonométriques ainsi que des méthodes d'interpolation pour trouver des valeurs approchées.

Dans son œuvre, malgré un maniement sophistiqué des notions utilisées, il n'y a pas de démonstration au sens où on l'entend actuellement, ni de définitions claires et précises.

- Son écriture est la même dans toutes les *bases de numération*. Il n'y a que deux entiers naturels ayant cette propriété : l'autre est 1.
- C'est l'élément neutre pour l'addition dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et, par extension, dans les autres ensembles de nombres $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$, etc. On a :

$$\text{pour tout nombre } x,\ x+0=x=0+x$$

- C'est l'élément absorbant pour la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et, par extension, dans tous les autres ensembles de nombres. On a :

$$\text{pour tout nombre } x,\ x\cdot 0=0=0\cdot x$$

- Il n'a pas d'inverse dans les ensembles usuels de nombres : en conséquence, la division par 0 est impossible dans ces ensembles.
- Du point de vue de l'arithmétique, il n'est ni *premier* ni *composé*.
- Il appartient à beaucoup de familles de nombres entiers... même si cela n'est pas très intéressant !
- C'est le seul nombre qui est cité explicitement dans les axiomes que Giuseppe PEANO (1858-1932) a donné pour définir l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (➥ p. 81).
- La valeur notée 0^0 pose un réel problème : vaut-elle 0 (car $0^n=0$), 1 (car $n^0=1$) ou une autre valeur ?

  La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^y$ n'apporte aucune réponse car elle est indéterminée.

  Pour étendre certaines définitions (par exemple avec les polynômes où il faut donner un sens à x^0 quand $x=0$), on donne souvent, par convention, la valeur 1 à 0^0. En l'absence de cette convention, on considère que 0^0 est indéterminée.
- Il n'existe pas d'algorithme général permettant de décider si une expression mathématique est égale à 0. Ce résultat, démontré en 1968 par Daniel RICHARDSON, informaticien né aux États-Unis en 1941, permet de comprendre la difficulté à démontrer une identité du type $A=B$ à l'aide d'un système de calcul formel.

- Par convention, on pose $0\,! = 1$, ce qui est assez naturel puisque la *factorielle* est définie comme un produit et qu'en l'absence de facteurs, on trouve l'élément neutre pour la multiplication.
- C'est un des rares nombres entiers auquel plusieurs livres ont été consacrés, même si, comme dans le déroulement historique des idées et des concepts, l'histoire du nombre 0 est souvent mêlée à l'histoire du chiffre 0. On peut citer :
  - *À propos de rien : une histoire du zéro* [Kap04] de Robert KAPLAN ;
  - *Zéro : la biographie d'une idée dangereuse* [Sei02] de Charles SEIFE ;
  - *Zéro ou les cinq vies d'Aémer* [Gue05] de Denis GUEDJ ;
  - *Il était une fois le zéro* [HG23] d'Antoine HOULOU-GARCIA.

1

- C'est l'élément unité pour la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et, par extension, dans tous les autres ensembles de nombres. On a :
$$\text{pour tout nombre } x,\ x \cdot 1 = x = 1 \cdot x.$$
- Il a mis longtemps à acquérir le statut de nombre : pour les Grecs, ce n'était pas un nombre mais une unité indivisible à partir de laquelle les autres nombres étaient obtenus par agrégation.
- Il n'est ni *premier* ni *composé* : 1 est une « *unité* », c'est-à-dire un élément inversible dans l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. On peut remarquer que, jusqu'au début du XX$^{\text{e}}$ siècle, certains mathématiciens le considéraient comme un nombre *premier*.
- C'est le seul entier positif égal à son inverse. C'est aussi le seul qui divise tous les autres. C'est encore le seul qui possède exactement un seul *diviseur* positif.
- Son écriture est la même dans toutes les *bases de numération*. Avec 0, c'est le seul entier naturel possédant cette propriété.
- En combinatoire, c'est un *nombre-cake*, un *nombre de* BELL, un *nombre de* DELANNOY *central*, un « *nombre de* FUBINI » (➥ p. 618), un *nombre de* MOTZKIN, un *nombre de* QUENEAU, un *nombre de* STIRLING *de* 1^{re} *espèce* et aussi de 2^{e} *espèce*, un *nombre-pizza*, un *nombre zag*, un *nombre zig*…
- C'est aussi un *nombre de* FIBONACCI, un *nombre de* LUCAS, un *nombre de* PADOVAN, un *nombre de* PELL, un *nombre de* TRIBONACCI…
- Ce n'est pas un *nombre McNugget*.
- Il fait partie de toutes les familles de nombres *figurés*, en particulier des familles de nombres *polygonaux* : il est *carré*, *décagonal*, *ennéagonal*, *heptagonal*, *hexagonal*, *octogonal*, *pentagonal*, *triangulaire*… Il est aussi *polyédrique*, *tétraédrique*…
- Il possède de nombreuses propriétés arithmétiques : il est *arithmétique*, *chanceux*, *déficient*, *hautement composé*, *pratique*, *puissant*, *sans facteur carré*, *solitaire*…
- Il n'est pas *abondant* mais, ce qui peut paraître surprenant, il est *hautement abondant*. De même, il est *superabondant*.
- La fonction φ étant l'*indicatrice d'*EULER, l'équation $\varphi(x) = 1$ a deux solutions : 1 et 2. Comme le nombre 1 est évidemment le plus petit possédant cette propriété, il est *hautement indicateur*.

- Selon une conjecture formulée en 1907 par Robert CARMICHAEL, mathématicien américain (1879-1967), si φ désigne toujours la *fonction indicatrice d'*EULER, il n'existe pas d'entier m pour lequel l'équation $\varphi(x) = m$ a 1 seule solution.

L'*indicatrice d'*EULER est une fonction très importante en arithmétique : notée φ, elle est souvent appelée *fonction* φ d'EULER et porte ce nom en hommage à Leonhard EULER (➥ p. 498) qui fut un des premiers à l'étudier. Elle associe à tout entier n supérieur à 1 le nombre d'entiers inférieurs à n et *premiers avec lui*.

Par exemple $\varphi(9) = 6$ car il y a 6 nombres entiers *premiers avec* 9 et inférieurs à lui. Ces nombres sont 1, 2, 4, 5, 7 et 8.

On a une expression de $\varphi(n)$ à partir de la décomposition de n en produit de facteurs *premiers* :

$$\text{Si } n \text{ s'écrit } n = \prod_{i=1}^{q} {p_i}^{k_i}$$

$$\text{Alors } \varphi(n) = \prod_{i=1}^{q} (p_i - 1)\, {p_i}^{k_i - 1} = n \prod_{i=1}^{q} (1 - \frac{1}{p_i})$$

La fonction φ est une fonction multiplicative, c'est-à-dire que : $\varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q)$ si p et q sont deux entiers *premiers entre eux*.

On peut démontrer que $\varphi(n)$ ne prend que des valeurs paires dès que $n \geqslant 3$.

Si n est *premier*, alors $\varphi(n)$ divise $n - 1$ (on a même l'égalité). Derrick LEHMER, mathématicien américain (1905-1991), a énoncé en 1932 la conjecture que la réciproque est vraie, à savoir : si $\varphi(n)$ divise $n - 1$, alors n est *premier*. À ce jour, on n'en a pas de démonstration.

On peut remarquer qu'en dehors de nombreux travaux en théorie des nombres, Derrick LEHMER participa dans les années 1945-1946 à la mise au point de l'ENIAC, considéré souvent comme le premier ordinateur.

Concernant la conjecture, on sait actuellement qu'un contre-exemple doit comporter au moins 15 facteurs *premiers* et être supérieur à 10^{26}.

L'entier $\varphi(n)$ est le nombre d'éléments inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: ce résultat a des conséquences en cryptographie et est un élément important du système RSA développé en 1977 par Ronald RIVEST, Adi SHAMIR et Leonard ADLEMAN. Ce système de chiffrement se retrouve dans de nombreuses techniques d'authentification de cartes à puce : c'est, par exemple, le cas dans les cartes bancaires.

C'est aussi le degré du n^{e} polynôme cyclotomique $\Phi(n)$ (➥ p. 399). Ces polynômes interviennent dans la théorie du codage, en particulier celle des codes correcteurs d'erreurs. Une conséquence en est l'égalité suivante :

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

On a les relations suivantes pour la fonction φ :

$$\sqrt{n} \leqslant \varphi(n) \text{ pour } n \geqslant 6$$
$$\varphi(n) = n - 1 \text{ si } n \text{ est } \textit{premier}$$
$$\varphi(n) \leqslant n - \sqrt{n} \text{ si } n \text{ est } \textit{composé}$$

D'autres relations sont vérifiées par cette fonction φ. Citons simplement celle qui la relie à la fonction ζ de RIEMANN (➥ p. 580) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

Plusieurs conjectures concernent la fonction φ. En dehors de la conjecture de LEHMER citée précédemment, la conjecture formulée par CARMICHAEL en 1907 énonce qu'il n'existe pas d'entier m tel que l'équation $\varphi(x) = m$ ait une seule solution.

Pour tout entier m, cette équation a au moins deux solutions ou aucune, auquel cas m est alors un nombre *anti-indicateur*. En fait, CARMICHAEL croyait avoir démontré cette conjecture et, en 1922, une erreur fut trouvée dans sa démonstration.

On est toujours en attente d'une démonstration correcte. Depuis 1999 et les travaux du mathématicien américain Kevin FORD, né en 1967, on sait qu'un contre-exemple m devrait vérifier la relation $m > 10^{10^{10}}$, c'est-à-dire avoir plus de $10^{10} = 10\,000\,000\,000$ chiffres.

Les nombres *anti-indicateurs* et *hautement indicateurs* sont liés, bien évidemment, à cette fonction *indicatrice d'*EULER.

On pourra consulter :

– tout ouvrage sur la théorie des nombres, par exemple le célèbre *An introduction to the theory of numbers* [HW79] de G.H. HARDY et E.M. WRIGHT ;
– le site *Wikipedia français* [Wikb] (► *Indicatrice d'Euler*) ;
– le site *MathWorld* d'Eric WEISSTEIN [Wei] (► *Totient Function* et ► *Carmichael's Totient Function Conjecture*).

- Il ne possède pas d'*antécédent aliquote* : il est *intouchable*.
- C'est un *nombre de* CATALAN, un *nombre de* CULLEN, un *nombre de* HEEGNER, un *nombre de* MERSENNE, un *nombre d'*ORE, un *nombre de* WOODALL…
- Le nombre 1 possède de nombreuses propriétés, pas très intéressantes dans son cas, en rapport avec son écriture décimale : il est *automorphe*, *équidigital*, *heureux*, *trimorphe*… C'est aussi un *nombre colombien* et un *nombre de* ZUCKERMAN.
- C'est un *nombre harshad* et même « *super harshad* » (➥ p. 360). De plus, il est *harshad complet*, c'est-à-dire *harshad* pour toutes les *bases de numération*.
- Toujours en tant que nombre s'écrivant avec un seul chiffre, c'est un *nombre palindrome* mais c'est aussi un « *nombre strictement non palindrome* » (➥ p. 217) !
- C'est un *nombre d'*ARMSTRONG de multiples manières : la fonction motif peut être n'importe quelle fonction puissance. C'est aussi un *nombre d'*ARMSTRONG *plus-que-parfait*.
- Toujours en rapport avec son écriture décimale, il est égal à la somme des *factorielles* de ses chiffres ($1 = 1\,!$) : on dit que c'est un « *factorion* » (➥ p. 593). C'est aussi un *nombre de* MÜNCHAUSEN ($1 = 1^1$).
- Il est, de manière évidente, égal au produit de la somme de ses chiffres et du produit de ses chiffres : on dit que c'est un « *entier somme-produit* » (➥ p. 414). Sans surprise, c'est donc un nombre *narcissique* de plusieurs manières différentes.

- C'est le premier « *nombre d'*ACKERMAN » (➥ p. 761) : on a en effet $1 = 1 \uparrow 1 = 1^1$ en utilisant la notation des « *puissances itérées* » (➥ p. 702).
- C'est aussi la première valeur des « *fonctions* Σ *et* S *de* RADÓ » associées au problème du « *castor affairé* » (➥ p. 401) : $\Sigma(1) = S(1) = 1$.
- Si α est un nombre irrationnel, la suite de ses multiples $n\alpha$ est uniformément répartie modulo 1, c'est-à-dire que la fréquence des termes de la suite dont les parties fractionnaires $\lfloor n\alpha \rfloor$ appartiennent à un sous-intervalle I de $[0, 1]$ est proportionnelle à la longueur de I.

  Ce théorème a été prouvé en 1909 et 1910 de manière indépendante par plusieurs mathématiciens parmi lesquels on trouve Hermann WEYL (➥ p. 6), Waclaw SIERPIŃSKI, mathématicien polonais (1882-1969) et Piers BOHL, mathématicien letton (1865-1921).

  Le résultat reste vrai si on ne prend que les multiples $p\,\alpha$ où p est un nombre *premier* : c'est alors un théorème d'Ivan Matveyevich VINOGRADOV datant de 1935. VINOGRADOV est un mathématicien soviétique (1891-1983), spécialiste de théorie des nombres, où il a apporté de nouvelles méthodes, et figure dominante des mathématiques en URSS.

  Hermann WEYL a introduit un critère, qui maintenant porte son nom, permettant de prouver l'uniforme distribution (on parle d'équidistribution) d'une suite. Plus généralement, il a montré que, si P est un polynôme réel possédant au moins un coefficient irrationnel (autre que le coefficient constant), la suite $P(n)$ est uniformément répartie modulo 1.

Hermann WEYL (1885-1955)

Mathématicien allemand, il a aussi apporté une contribution importante en physique théorique. Il est considéré comme l'un des derniers mathématiciens, avec le français Henri POINCARÉ (➥ p. 55), à avoir une vision complète de l'ensemble des connaissances mathématiques de son époque.

Il fait ses études à l'université de Göttingen où il est l'élève de David HILBERT (➥ p. 232) et de Hermann MINKOWSKI, mathématicien allemand né dans l'empire russe (1864-1909) qui a développé l'étude de la géométrie des nombres.

De 1913 à 1930, Hermann WEYL est professeur à l'École polytechnique fédérale de Zurich, en Suisse, où il côtoie Albert EINSTEIN puis Erwin SCHRÖDINGER.

En 1930, il succède à HILBERT à l'université de Göttingen mais quitte l'Allemagne en 1933 à l'arrivée des nazis.

Il est ensuite professeur à l'Institute for Advanced Study (IAS) à Princeton, aux États-Unis, jusqu'en 1951, année où il prend sa retraite. Il y côtoie à nouveau EINSTEIN.

Il étudie les surfaces de RIEMANN et, à cette occasion, formalise la notion de surface de manière abstraite. En géométrie riemannienne, il tente de modéliser les champs électromagnétique et gravitationnel comme des propriétés géométriques de l'espace.

Toujours en liaison avec la physique théorique, il étudie les groupes topologiques. Ses études sur les groupes compacts, en particulier les groupes de LIE compacts ont permis de formaliser la mécanique quantique dans la continuité des travaux de John VON NEUMANN (➥ p. 146).

Les groupes non compacts et leurs représentations ont aussi été un de ses sujets de préoccupation.

En théorie des nombres, il s'intéresse à l'approximation diophantienne et introduit les sommes exponentielles qui, utilisées par d'autres, deviendront un outil important dans un certain nombre de problèmes de la théorie additive des nombres.

Il s'est intéressé aux fondements des mathématiques, se rattachant dans un premier temps au courant intuitioniste mené par Luitzen BROUWER, mathématicien néerlandais (1881-1966). Il refuse par exemple l'axiome du choix (➥ p. 130) et l'existence de la borne supérieure d'un sous-ensemble majoré dans l'ensemble des réels.

Une de ses citations les plus connues résume bien son état d'esprit : *mon travail a toujours consisté à unifier la vérité avec la beauté, mais quand je devais choisir l'une ou l'autre, j'ai toujours choisi la beauté.*

- On considère le processus suivant :
  - écrire la suite des nombres *premiers* sur une ligne ;
  - puis, sur la ligne suivante, écrire les valeurs absolues des différences entre deux termes consécutifs de la première ligne ;
  - poursuivre l'opération pour toutes les lignes suivantes…

  La conjecture de GILBREATH énonce alors qu'à partir de la deuxième ligne, le premier terme sur chaque ligne est toujours le nombre 1.

En 1958, Norman GILBREATH, informaticien américain né en 1936, féru de prestigiditation et de mathématiques, griffone sur une nappe et écrit la suite croissante des nombres *premiers* :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 …

Puis il écrit sur une deuxième ligne les différences des nombres de la première ligne :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 …
1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4 …

Il poursuit en itérant le processus, c'est-à-dire en prenant, à chaque nouvelle ligne, les valeurs absolues des différences des termes de la ligne précédente :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 …
1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4 …
1, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 2 …
1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 2, 0, 0 …
1, 2, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 0 …
1, 2, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 2 …
1, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 2 …
1, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2 …
1, 2, 2, 2, 2, 2, 2 …
1, 0, 0, 0, 0, 0 …
1, 0, 0, 0, 0 …

Il remarque alors que le premier terme de chaque ligne, à partir de la deuxième, est toujours le nombre 1.

Cette conjecture a été vérifiée pour tous les nombres *premiers* p inférieurs à 10^{13}, ce qui revient à écrire plus de trois cent quarante milliards de lignes (exactement $346\,065\,536\,839$ lignes) dans le processus précédent !

Son énoncé parait très simple mais aucune démonstration n'est en vue à l'heure actuelle. Paul ERDŐS (➥ p. 11) pensait qu'elle était vraie mais qu'il faudrait probablement attendre 200 ans avant qu'elle ne soit prouvée !

Il n'est pas sûr que ce résultat, s'il était vrai, soit lié aux nombres *premiers* mais peut-être simplement à toute suite commençant par 2 et comportant des entiers impairs en ordre croissant séparés par des intervalles significatifs.

En fait, cette conjecture avait déjà été remarquée par François PROTH, autodidacte français (1852-1879) à qui on doit en particulier un test de primalité. Il en avait donné une démonstration en 1878 mais elle était fausse.

On pourra consulter :

– le site *Wikipedia anglais* [Wika] (► *Gilbreath's conjecture*) ;
– le site *The Prime Pages* [Cal] de Chris CALDWELL (► *Gilbreath's conjecture*) ;
– le *Beau livre des maths* [Pic10] de Clifford PICKOVER (► *année 1958*).

- C'est le nombre d'éléments du plus petit groupe. Il peut être vu comme un groupe additif : $(\{0\}, +)$ ou comme un groupe multiplicatif : $(\{1\}, \times)$.

- Il y a de nombreux travaux sur le « *corps à* 1 *élément* », noté $\mathbb{F}_1$ ou $\mathbb{F}_{un}$ (on remarquera l'« humour mathématique » avec ce deuxième nom). Ce n'est pas une erreur ou un poisson d'avril… même si tout corps doit contenir au minimum deux éléments 0 et 1, le plus petit corps étant $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

  C'est Jacques TITS, mathématicien français d'origine belge (1930-2021), qui, le premier, a remarqué certaines analogies entre le groupe symétrique et les groupes algébriques sur les corps $\mathbb{F}_q$: ces analogies avaient une explication si on prenait $q = 1$. Il a donc introduit le « *corps à* 1 *élément* » $\mathbb{F}_1$. Jacques TITS, longtemps professeur au Collège de France, est récipiendaire du prix WOLF (➥ p. 545) en 1993 et du prix ABEL (➥ p. 551) en 2008.

  Depuis, diverses géométries ont été construites sur le « *corps* » $\mathbb{F}_1$: par exemple, dans ce cadre, l'hypothèse de RIEMANN (➥ p. 580) est l'analogue des conjectures de WEIL, conjectures énoncées par André WEIL, mathématicien français (1906-1998) membre fondateur du groupe Nicolas BOURBAKI (➥ p. 539), connu pour ses travaux fondamentaux en théorie des nombres et en géométrie algébrique.

  Ces conjectures ont été démontrées en 1974 par Pierre DELIGNE, mathématicien belge (né en 1944), dans le cadre de la monumentale formalisation de la géométrie algébrique développée par Alexandre GROTHENDIECK (➥ p. 314).

  Pierre DELIGNE a reçu presque toutes les récompenses : médaille FIELDS (➥ p. 540) en 1978 puis prix CRAFOORD (➥ p. 548) en 1988, prix WOLF (➥ p. 545) en 2008 et enfin prix ABEL (➥ p. 551) en 2013.

  Récemment, Alain CONNES, mathématicien français (né en 1947), médaille FIELDS (➥ p. 540) en 1982 puis prix CRAFOORD (➥ p. 548) en 2001, a relié $\mathbb{F}_1$ à ses travaux de géométrie non-commutative, laquelle offre un cadre en physique théorique pour l'un des modèles actuels, à côté du modèle standard, pour unifier les quatre forces fondamentales de la nature.